

# Effacement des croyances en logique propositionnelle

Nadia Creignou<sup>1</sup> Raïda Ktari<sup>1,2</sup> Odile Papini<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Aix Marseille Univ, CNRS, LIS, Marseille, France

<sup>2</sup> Université de Sfax, ISIMS, CES-Lab LR11ES49, Sfax, Tunisie

{nadia.creignou, raida.ktari, odile.papini}@univ-amu.fr

## Résumé

L'un des thèmes importants de la représentation des connaissances et du raisonnement en intelligence artificielle est le changement de croyances. Dans le cadre logique l'approche AGM s'est imposée comme un standard et différentes opérations de changement de croyances ont été envisagées. Alors que la révision, la contraction, et la mise à jour ont donné lieu à de nombreux travaux, l'effacement a suscité jusqu'à présent moins d'intérêt. L'effacement est à la contraction ce que la mise à jour est à la révision. L'article porte sur l'étude de l'effacement dans le cadre de la logique propositionnelle. Il prolonge l'approche de Katsuno et Mendelzon par des postulats supplémentaires capturant la minimalité du changement et propose deux théorèmes de représentation pour les opérateurs d'effacement, l'un en termes de préordres totaux sur les interprétations, l'autre en termes de préordres partiels sur les interprétations. Enfin, il complète les travaux de Caridroit, Konieczny et Marquis pour la contraction en proposant un nouveau théorème de représentation pour les opérateurs de contraction en termes de préordres partiels sur les interprétations.

## Abstract

Belief change is an important topic of knowledge representation and reasoning in artificial intelligence. Within the logical framework, the AGM approach has become a standard and various belief change operations have been considered. While revision, contraction and updating have given rise to a great deal of work, erasure has so far attracted less interest. Erasure is to contraction what update is to revision. This article deals with the study of erasure within the framework of propositional logic. It extends Katsuno and Mendelzon's approach with additional postulates capturing the minimality of change and proposes two representation theorems for erasure operators, one in terms of total preorders on interpretations, the other in terms of partial preorders on interpretations. Finally, it completes the work of Caridroit, Konieczny and Marquis for contraction by proposing a new representation theorem for contraction operators in terms of partial preorders on interpretations.

## 1 Introduction

Le changement de croyances est une thématique importante dans le domaine de la représentation des connaissances et du raisonnement en intelligence artificielle. Les approches logiques ont donné lieu à de nombreux travaux depuis l'approche AGM qui s'est imposée comme un standard [1, 10]. Différentes opérations de changement de croyances ont été étudiées, révision [1, 10, 6, 19], mise à jour [9, 20, 14, 11], contraction [2, 10, 4]<sup>1</sup>.

Afin de caractériser différentes approches sémantiques de la révision dans un même cadre, Katsuno et Mendelzon [13] ont restreint l'approche AGM à la logique propositionnelle. Ils ont reformulé les postulats AGM, et proposé deux théorèmes de représentation, l'un en termes de préordres totaux sur les interprétations et l'autre en termes de préordres partiels sur les interprétations. Ce cadre sémantique a permis de clairement distinguer les opérations de révision et de mise à jour [14]. D'un point de vue sémantique, les opérateurs de révision reposent sur une minimisation globale, ils sélectionnent les modèles de la nouvelle information les plus "proches" des modèles de l'ensemble de croyances initial, alors que les opérateurs de mise à jour reposent sur une minimisation locale, ils sélectionnent, pour chaque modèle de l'ensemble de croyances initial, les modèles de la nouvelle information les plus "proches" de celui-ci.

Plus récemment, s'inspirant de Katsuno et Mendelzon, Caridroit, Konieczny et Marquis ont reformulé les postulats AGM de la contraction dans le cadre propositionnel et ont proposé un théorème de représentation pour les opérateurs de contraction en termes de préordres totaux sur les interprétations [4].

Dans [14], Katsuno et Mendelzon définissent une nouvelle opération de changement de croyances, qu'ils

<sup>1</sup>. Pour plus de détails sur les différentes approches proposées pour ces opérations consulter par exemple [17] ou [18].

nomment *effacement*, qui est à la contraction ce que la mise à jour est à la révision. Effacer une information repose sur une minimisation locale, c'est à dire que les opérateurs d'effacement sélectionnent les modèles de l'ensemble de croyances initiales ainsi que les modèles qui falsifient l'information à effacer, les plus "proches" de chaque modèle de l'ensemble de croyances initiales. Katsuno et Mendelson proposent une définition sémantique de l'effacement ainsi que des postulats basiques que cette opération doit satisfaire.

L'effacement a été étudié comme beaucoup d'opérations de changement de croyances dans le cadre de fragments propositionnels [5], cependant les études réalisées sur l'effacement restaient, jusqu'à présent, incomplètes car elles ne proposaient qu'un ensemble de postulats basiques pour cette opération insuffisant pour conduire à un théorème de représentation.

L'objet de cet article est de compléter l'étude de l'effacement en proposant :

- des postulats supplémentaires qui capturent le changement minimal de l'opération d'effacement,
- un théorème de représentation pour les opérateurs d'effacement en termes de préordres totaux,
- un théorème de représentation pour les opérateurs d'effacement en termes de préordres partiels.

Par ailleurs, l'article complète également les travaux de Caridroit, Konieczny et Marquis sur la contraction [4] en présentant un théorème de représentation pour les opérateurs de contraction en termes de préordres partiels qui, à ce jour, manquait.

Ainsi, ce travail met une touche finale au panorama de l'étude sémantique des opérateurs de changement de croyances pour la contraction et l'effacement.

L'article se décline comme suit. Après quelques préliminaires en Section 2 qui rappellent quelques notions utiles à la suite de l'article, la Section 3 présente un rapide état de l'art sur les opérations de changement de croyances, révision, contraction et mise à jour. La Section 4 présente la contribution de l'article sur l'effacement (postulats supplémentaires, théorèmes de représentation) ainsi que le théorème de représentation pour les opérateurs de contraction en termes de préordres partiels avant de conclure en Section 5.

## 2 Préliminaires

**Logique propositionnelle.** Nous considérons  $\mathcal{L}$  le langage de la logique propositionnelle défini sur un ensemble infini dénombrable de variables propositionnelles (ou atomes), noté  $\mathcal{V}$ , muni des connecteurs logiques usuels  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$  et des constantes  $\top$ ,  $\perp$ . Les lettres minuscules romaines  $a, b, c, \dots$  désignent les atomes, les lettres grecques  $\alpha, \beta, \varphi, \dots$  désignent les formules bien formées et les lettres majuscules désignent les ensembles d'atomes ou les ensembles de formules bien formées. Pour toute formule  $\varphi$  de

$\mathcal{L}$ , on note par  $\text{Var}(\varphi)$  l'ensemble des atomes apparaissant dans la formule  $\varphi$ .

Une interprétation est une fonction  $w : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$  qui associe à chaque atome une valeur de vérité, 0 pour faux ou 1 pour vrai. ( $w(\perp) = 0$  et  $w(\top) = 1$ ). Soit  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  un ensemble fini d'atomes, une *interprétation* sur  $\mathcal{U}$  est représentée par un ensemble  $w \subseteq \mathcal{U}$  d'atomes évalués à vrai ou par son vecteur caractéristique correspondant de longueur  $|\mathcal{U}|$ . Une interprétation qui satisfait une formule  $\varphi$  est appelée *modèle* de  $\varphi$  et nous notons  $\text{Mod}(\varphi)$  l'ensemble des modèles de  $\varphi$ . De plus,  $\varphi \models \psi$  si  $\text{Mod}(\varphi) \subseteq \text{Mod}(\psi)$  et  $\psi \equiv \varphi$  ( $\psi$  et  $\varphi$  sont équivalentes) si  $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$ .

Une formule  $\psi$  est dite *complète* si pour toute formule  $\mu \in \mathcal{L}$  soit  $\psi \models \mu$  soit  $\psi \models \neg\mu$ . D'une manière équivalente, une formule satisfaisable est complète si et seulement si elle admet exactement un modèle.

Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble, un préordre est une relation binaire de  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ , noté  $\leq$ , qui est réflexive et transitive. Le préordre strict associé à  $\leq$  est défini par  $w < w'$  si  $w \leq w'$  et  $w' \not\leq w$ . Une relation d'équivalence induite par  $\leq$ , notée  $\approx$ , est définie par  $w \approx w'$  si  $w \leq w'$  et  $w' \leq w$ . Un préordre est dit total si pour tout  $w, w'$  de  $\mathcal{I}$ , soit  $w \leq w'$  ou  $w' \leq w$ . L'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{I}$  selon le préordre  $\leq$ , noté  $\text{Min}_{\leq}(\mathcal{I})$  est défini par  $\text{Min}_{\leq}(\mathcal{I}) = \{w \in \mathcal{I} \mid \text{il n'existe pas } w' \in \mathcal{I} \text{ tel que } w' < w\}$ .

Nous rappelons deux distances entre un modèle  $w$  et une formule. L'une basée sur la cardinalité, notée  $|\Delta|_w^{\text{min}}(\mu)$ , comme étant le nombre minimal de variables propositionnelles pour lesquelles  $w$  et les modèles de  $\mu$  diffèrent. Formellement,  $|\Delta|_w^{\text{min}}(\mu) = \min\{|w\Delta w'| : w' \in \text{Mod}(\mu)\}$ . L'autre basée sur l'inclusion ensembliste, notée  $\Delta_w^{\text{min}}(\mu)$ , comme étant les ensembles minimaux, au sens de l'inclusion, de variables propositionnelles pour lesquelles  $w$  et les modèles de  $\mu$  diffèrent. Formellement,  $\Delta_w^{\text{min}}(\mu) = \min_{\subseteq}(\{w\Delta w' : w' \in \text{Mod}(\mu)\})$ .

## 3 Etat de l'art

### 3.1 Révision des croyances

La révision de croyances est une opération qui permet d'accepter une nouvelle information, en préservant la cohérence tout en modifiant le moins possible les croyances initiales. Plus formellement, une opération de révision, est une fonction, notée  $\circ$ , de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  vers  $\mathcal{L}$ , qui à partir d'une formule  $\psi$  (les croyances initiales d'un agent), et d'une formule  $\mu$  (la nouvelle information), fournit une nouvelle formule,  $\psi \circ \mu$  (les croyances de l'agent révisées).

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [1] ont étudié la révision lorsque les croyances d'un agent sont représentées par une théorie (ensemble de formules déductivement clos) et ont proposé un ensemble de postulats, appelés *postulats AGM*, que devrait satisfaire tout opérateur de révision "rationnel". Dans le cadre propositionnel, Katsuno et Men-

delzon [12] ont reformulé les postulats AGM lorsqu'une théorie est représenté par les modèles d'une formule. Dans ce cadre, la révision de  $\psi$  par  $\mu$  revient à rechercher les modèles de  $\mu$  les plus proches de ceux de  $\psi$ . Ces postulats connus sous le nom de postulats KM sont les suivants :

Soit  $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$ .

- (R1)  $\psi \circ \mu \models \mu$ .
- (R2) Si  $(\psi \wedge \mu)$  est satisfaisable, alors  $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$ .
- (R3) Si  $\mu$  est satisfaisable, alors  $\psi \circ \mu$  est satisfaisable.
- (R4) Si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$ .
- (R5)  $(\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2 \models \psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2)$ .
- (R6) Si  $(\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$  est satisfaisable alors  $\psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2) \models (\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$ .
- (R7) Si  $(\psi \circ \mu_1) \models \mu_2$  et  $(\psi \circ \mu_2) \models \mu_1$ , alors  $\psi \circ \mu_1 \equiv \psi \circ \mu_2$ .
- (R8)  $(\psi \circ \mu_1) \wedge (\psi \circ \mu_2) \models \psi \circ (\mu_1 \vee \mu_2)$ .

Une description détaillée de ces postulats est dans [13].

Katsuno et Mendelzon [12, 13] ont montré que l'opération de révision  $\circ$ , selon l'ensemble de postulats KM qu'elle satisfait, peut se traduire par un préordre total sur les interprétations ou par un préordre partiel sur les interprétations. Plus formellement, une *affectation fidèle* est une fonction qui associe à chaque formule  $\psi$  un préordre  $\leq_\psi$  sur les interprétations tel que :

1. Si  $w, w' \in \text{Mod}(\psi)$  alors  $w \not\prec_\psi w'$
2. Si  $w \in \text{Mod}(\psi)$  et  $w' \notin \text{Mod}(\psi)$  alors  $w \prec_\psi w'$
3. Si  $\psi \equiv \psi'$ , alors  $\leq_\psi = \leq_{\psi'}$

Ils ont fourni le théorème de représentation suivant :

**Theorem 1** [13]

- Un opérateur de révision  $\circ$  satisfait tous les postulats (R1)–(R6) si et seulement si il existe une affectation fidèle qui associe à chaque formule  $\psi$  un préordre total  $\leq_\psi$  tel que  $\text{Mod}(\psi \circ \mu) = \text{Min}_{\leq_\psi}(\text{Mod}(\mu))$ .
- Un opérateur de révision  $\circ$  satisfait les postulats (R1)–(R5), (R7) and (R8) si et seulement si il existe une affectation fidèle qui associe à chaque formule  $\psi$  un préordre partiel  $\leq_\psi$  tel que  $\text{Mod}(\psi \circ \mu) = \text{Min}_{\leq_\psi}(\text{Mod}(\mu))$ .

Il existe de nombreux opérateurs de révision dans la littérature, nous nous limitons ici à présenter l'opérateur de révision de Dalal, noté  $(\circ_D)$ , [6], et l'opérateur de révision de Satoh, noté  $(\circ_S)$ , [19]. La proximité pour l'opérateur Dalal se mesure en terme de cardinalité de la différence symétrique entre modèles,

$$\text{Mod}(\psi \circ_D \mu) = \{m \in \text{Mod}(\mu) : \exists m' \in \text{Mod}(\psi) \text{ tel que } |m \Delta m'| = |\Delta_m^{\text{min}}(\mu)|\}.$$

Tandis que la proximité pour l'opérateur Satoh se mesure en terme d'inclusion ensembliste de la différence symétrique entre modèles.

$$\text{Mod}(\psi \circ_S \mu) = \{m \in \text{Mod}(\mu) : \exists m' \in \text{Mod}(\psi) \text{ tel que } m \Delta m' \in \Delta_m^{\text{min}}(\mu)\}.$$

Notons que l'opérateur de révision de Dalal satisfait (R1)–(R6) [8, 13] tandis que l'opérateur de révision de Satoh satisfait (R1)–(R5), (R7) et (R8) [13].

### 3.2 Contraction des croyances

La contraction de croyances est une opération qui permet de retirer une croyance de l'ensemble des croyances initiales en respectant le principe de changement minimal tout en préservant la cohérence. Formellement, une opération de contraction est une fonction, notée  $-$ , de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  vers  $\mathcal{L}$  qui à partir d'une formule  $\psi$  (les croyances initiales d'un agent) et d'une formule  $\mu$  (la croyance à retirer), fournit  $\psi - \mu$  (les croyances de l'agent contractées).

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [1] ont étudié la contraction lorsque les croyances d'un agent sont représentées par une théorie et ont proposé des postulats que tout opérateur de contraction devrait satisfaire. Katsuno et Mendelzon [14] ont proposé une reformulation de certains postulats AGM pour la contraction lorsqu'une théorie est représenté par les modèles d'une formule. Plus récemment, Caridroit, Konieczny et Marquis [4] ont revisité les postulats de la contraction, en proposant, en particulier, des postulats supplémentaires caractérisant le principe de changement minimal.

Soit  $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$ .

- (C1)  $\psi \models \psi - \mu$ .
- (C2) Si  $\psi \not\models \mu$ , alors  $\psi - \mu \models \psi$ .
- (C3) Si  $\psi - \mu \models \mu$ , alors  $\psi \models \mu$ .
- (C4) Si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\psi_1 - \mu_1 \equiv \psi_2 - \mu_2$ .
- (C5) Si  $\psi \models \mu$ , alors  $(\psi - \mu) \wedge \mu \models \psi$ .
- (C6)  $\psi - (\mu_1 \wedge \mu_2) \models (\psi - \mu_1) \vee (\psi - \mu_2)$ .
- (C7) Si  $\psi - (\mu_1 \wedge \mu_2) \not\models \mu_1$ , alors  $\psi - \mu_1 \models \psi - (\mu_1 \wedge \mu_2)$ .

Une description détaillée de ces postulats est dans [14] et [4].<sup>2</sup>

Caridroit, Konieczny et Marquis [4] ont montré qu'une opération de contraction  $-$  satisfaisant l'ensemble des postulats qu'ils ont proposés peut se traduire par un préordre total sur les interprétations.

2. Dans un souci de cohérence nous avons adopté la numérotation des postulats initialement proposée par Katsuno et Mendelzon, et qui diffère de celle proposée par Caridroit, Konieczny et Marquis, les postulats (C4) et (C5) étant inversés.

**Theorem 2** [3] *Un opérateur de contraction – satisfait les postulats (C1)–(C7) si et seulement si il existe une affectation fidèle qui associe à chaque formule  $\psi$  un préordre total  $\leq_\psi$  tel que  $\text{Mod}(\psi - \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \text{Min}_{\leq_\psi}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .*

Les opérations de révision et de contraction sont extrêmement liées comme le reflètent les identités de Levi et Harper :

$$\psi - \mu \equiv \psi \vee (\psi \circ \neg\mu) \text{ (identité de Harper)}$$

$$\psi \circ \mu \equiv (\psi - \neg\mu) \wedge \mu \text{ (identité de Lévi)}$$

Ces identités ont permis à Caridroit, Konieczny et Marquis de montrer les correspondances entre les postulats de la révision et ceux de la contraction [4].

**Theorem 3** [4]

- Si l'opérateur de contraction – satisfait (C1)–(C5) alors son analogue pour la révision  $\circ$  défini par l'identité de Lévi satisfait (R1)–(R4). De plus si (C6) est satisfait, alors (R5) est satisfait pour la révision. Enfin, si le postulat (C7) est satisfait, alors le postulat (R6) l'est aussi.
- Si l'opérateur de révision  $\circ$  satisfait (R1)–(R4) alors son analogue pour la contraction – défini par l'identité de Harper satisfait (C1)–(C5). De plus si (R5) est satisfait, alors (C6) est satisfait pour la contraction. Enfin, si (R6) est satisfait, alors (C7) l'est aussi.

Cela conduit naturellement à définir des opérateurs de contraction à partir d'opérateurs de révision. L'opérateur de contraction  $-_D$ , analogue à l'opérateur de révision de Dalal  $\circ_D$ , et l'opérateur de contraction  $-_S$ , analogue à l'opérateur de révision de Satoh  $\circ_S$ , sont respectivement définis comme suit :

$$\text{Mod}(\psi -_D \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \text{Mod}(\psi \circ_D \neg\mu).$$

$$\text{Mod}(\psi -_S \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \text{Mod}(\psi \circ_S \neg\mu).$$

Notons que l'opérateur  $-_D$  satisfait (C1)–(C7) tandis que l'opérateur  $-_S$  satisfait (C1)–(C6), mais viole (C7) [4].

### 3.3 Mise à jour des croyances

Keller et Winslett [15], puis Katsuno et Mendelzon [14] ont mis en évidence les différences entre révision et mise à jour. La mise à jour de croyances est une opération qui incorpore une nouvelle information reflétant un changement de l'environnement, en préservant la cohérence tout en modifiant le moins possible les croyances initiales. Formellement, une opération de la mise à jour est une fonction, notée  $\diamond$ , de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  vers  $\mathcal{L}$  qui à partir d'une formule  $\psi$  (les croyances initiales d'un agent) et d'une formule  $\mu$  (la nouvelle information reflétant le changement de l'environnement), fournit  $\psi \diamond \mu$  (les croyances de l'agent mises à jour). Les postulats KM [14] de la mise à jour sont les suivants :

Soit  $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$ .

- (U1)  $\psi \diamond \mu \models \mu$ .
- (U2) Si  $\psi \models \mu$ , alors  $\psi \diamond \mu \equiv \psi$ .
- (U3) Si  $\psi$  et  $\mu$  sont satisfaisables, alors  $\psi \diamond \mu$  l'est aussi.
- (U4) Si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\psi_1 \diamond \mu_1 \equiv \psi_2 \diamond \mu_2$ .
- (U5)  $(\psi \diamond \mu) \wedge \phi \models \psi \diamond (\mu \wedge \phi)$ .
- (U6) Si  $(\psi \diamond \mu_1) \models \mu_2$  et  $(\psi \diamond \mu_2) \models \mu_1$ , alors  $\psi \diamond \mu_1 \equiv \psi \diamond \mu_2$ .
- (U7) Si  $\psi$  est complète, alors  $(\psi \diamond \mu_1) \wedge (\psi \diamond \mu_2) \models \psi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$ .
- (U8)  $(\psi_1 \vee \psi_2) \diamond \mu \equiv (\psi_1 \diamond \mu) \vee (\psi_2 \diamond \mu)$ .
- (U9) Si  $\psi$  est complète et  $(\psi \diamond \mu) \wedge \phi$  est satisfaisable, alors  $\psi \diamond (\mu \wedge \phi) \models (\psi \diamond \mu) \wedge \phi$ .

Une description détaillée de ces postulats est dans [14].

Katsuno et Mendelzon [14] ont montré que l'opération de mise à jour  $\diamond$ , selon l'ensemble de postulats KM qu'elle satisfait, peut se traduire par un préordre total sur les interprétations ou par un préordre partiel sur les interprétations [14]. Plus formellement, une *affectation fidèle ponctuelle* est une fonction qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre  $\leq_w$  sur les interprétations, tel que pour toute interprétation  $w'$ , si  $w' \neq w$  alors  $w <_w w'$ . Ils ont fourni le théorème de représentation suivant :

**Theorem 4** [14]

- Un opérateur de mise à jour  $\diamond$  satisfait les postulats (U1)–(U5) et (U8)–(U9) si et seulement si il existe une affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre total  $\leq_w$  tel que  $\text{Mod}(\psi \diamond \mu) = \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min(\text{Mod}(\mu), \leq_w)$ .
- Un opérateur de mise à jour  $\diamond$  satisfait les postulats (U1)–(U8) si et seulement si il existe une affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre partiel  $\leq_w$  tel que  $\text{Mod}(\psi \diamond \mu) = \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min(\text{Mod}(\mu), \leq_w)$ .

Ce théorème de représentation permet de mettre en évidence la différence entre révision et mise-à-jour. La mise à jour repose sur une minimisation ponctuelle, modèle par modèle de  $\psi$  alors que la révision repose sur une minimisation globale. Il est à noter que lorsque  $\psi$  est une formule complète révision et mise à jour coïncident.

Nous nous limitons à présenter deux opérateurs de mise à jour, l'opérateur de Forbus [9], noté  $\diamond_F$ , et l'opérateur de Winslett est aussi appelé *PMA (Possible Models Approach)*[20], noté  $\diamond_W$ , définis respectivement comme suit :

$$\text{Mod}(\psi \diamond_F \mu) = \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \{w' \in \text{Mod}(\mu) : |w \Delta w'| = |\Delta|_w^{\min}(\mu)\}.$$

$$\text{Mod}(\psi \diamond_W \mu) = \bigcup_{m \in \text{Mod}(\psi)} \{m' \in \text{Mod}(\mu) : m \Delta m' \in \Delta_m^{\min}(\mu)\}.$$

Notons que l'opérateur  $\diamond_F$  satisfait (U1)–(U9) [14, 11] tandis que l'opérateur  $\diamond_W$  satisfait (U1)–(U8) [14], mais viole (U9)[16].

## 4 Effacement des croyances

L'effacement, introduit par Katsuno and Mendelzon [14], est à la contraction ce que la mise à jour est à la révision. Intuitivement, effacer une croyance signifie que l'environnement de l'agent a changé de telle sorte que cette croyance peut ne plus être valide. D'un point de vue logique lorsque les croyances d'un agent sont représentées par une formule  $\psi$ , effacer une croyance  $\mu$  de  $\psi$  signifie ajouter localement les modèles de  $\neg\mu$  aux modèles de  $\psi$ . Les opérateurs d'effacement que nous étudions sont des fonctions, notées  $\triangleleft$  de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  vers  $\mathcal{L}$  qui à partir d'une formule  $\psi$  qui représente les croyances initiales d'un agent et d'une formule  $\mu$  à effacer, renvoie une formule  $\psi \triangleleft \mu$ .

### 4.1 Postulats de base pour l'effacement

Des postulats que tout opérateur d'effacement devrait satisfaire ont été proposés par Katsuno et Mendelzon [14] dans le même esprit que ceux proposés pour la contraction et la mise à jour.

Soit  $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$ .

- (E1)  $\psi \models \psi \triangleleft \mu$ .
- (E2) Si  $\psi \not\models \mu$ , alors  $\psi \triangleleft \mu \equiv \psi$ .
- (E3) Si  $\psi$  est satisfaisable et  $\not\models \mu$ , alors  $\psi \triangleleft \mu \not\models \mu$ .
- (E4) Si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\psi_1 \triangleleft \mu_1 \equiv \psi_2 \triangleleft \mu_2$ .
- (E5)  $(\psi \triangleleft \mu) \wedge \mu \models \psi$ .
- (E8)  $(\psi_1 \vee \psi_2) \triangleleft \mu \equiv (\psi_1 \triangleleft \mu) \vee (\psi_2 \triangleleft \mu)$ .

De façon similaire aux identités de Levi et Harper liant contraction et révision Katsuno and Mendelzon [14] ont proposé des identités reliant effacement et mise à jour :

- (Id<sub>1</sub>)  $\psi \triangleleft \mu \equiv \psi \vee (\psi \diamond \neg\mu)$
- (Id<sub>2</sub>)  $\psi \diamond \mu \equiv (\psi \triangleleft \neg\mu) \wedge \mu$

De plus, ils ont proposé le résultat suivant concernant la satisfaction des postulats.

#### Proposition 1 [14]

1. Si un opérateur de mise à jour  $\diamond$  satisfait (U1)–(U4) et (U8), alors l'opérateur d'effacement  $\triangleleft$  défini par l'identité (Id<sub>1</sub>) satisfait (E1)–(E5) et (E8).
2. Si un opérateur d'effacement  $\triangleleft$  satisfait (E1)–(E4) et (E8), alors l'opérateur de mise à jour  $\diamond$  défini par l'identité (Id<sub>2</sub>) satisfait (U1)–(U4) et (U8).
3. Si un opérateur de mise à jour  $\diamond$  satisfait (U1)–(U4) et (U8), alors il est possible de définir un opérateur d'effacement grâce à (Id<sub>1</sub>). L'opérateur de mise à jour obtenu à partir de cet opérateur d'effacement via (Id<sub>2</sub>) est égal à l'opérateur de mise à jour initial  $\diamond$ .

4. Si un opérateur d'effacement  $\triangleleft$  satisfait (E1)–(E5) et (E8), alors il est possible de définir un opérateur de mise à jour grâce à (Id<sub>2</sub>). L'opérateur d'effacement obtenu à partir de cet opérateur de mise à jour via (Id<sub>1</sub>) est égal à l'opérateur d'effacement initial  $\triangleleft$ .

L'identité (Id<sub>1</sub>) nous a permis de définir des opérateurs d'effacement à partir des opérateurs de mise à jour connus [5]. Un opérateur d'effacement, noté  $\triangleleft_F$ , est défini par

$$\text{Mod}(\psi \triangleleft_F \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \text{Mod}(\psi \diamond_F \neg\mu)$$

où  $\diamond_F$  est l'opérateur de mise à jour de Forbus. Un opérateur d'effacement, noté  $\triangleleft_W$ , est défini par

$$\text{Mod}(\psi \triangleleft_W \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \text{Mod}(\psi \diamond_W \neg\mu)$$

où  $\diamond_W$  est l'opérateur de mise à jour de Winslett. Selon la Proposition 1, les opérateurs d'effacement  $\triangleleft_F$  et  $\triangleleft_W$  satisfont (E1) – (E5) et (E8).

L'exemple suivant illustre les opérateurs  $\triangleleft_F$  et  $\triangleleft_W$ .

**Exemple 1** Soit  $\psi, \mu$  deux formules propositionnelles telles que  $\text{Mod}(\psi) = \{abcd, a\}$  et  $\text{Mod}(\mu) = \{a, c, d, ab, ac, ad, bc, cd, abc, abd, bcd, abcd, \emptyset\}$ . Nous avons  $\text{Mod}(\neg\mu) = \{acd, bd, b\}$  et d'après la Table 1,  $\text{Mod}(\psi \triangleleft_F \neg\mu) = \{acd, b\}$  et  $\text{Mod}(\psi \triangleleft_W \neg\mu) = \{acd, bd, b\}$ . Les résultats de l'effacement avec les opérateurs  $\triangleleft_F$  et  $\triangleleft_W$  sont respectivement  $\text{Mod}(\psi \triangleleft_F \mu) = \{abcd, a, acd, b\}$  et  $\text{Mod}(\psi \triangleleft_W \mu) = \{abcd, a, acd, bd, b\}$ .

		Mod( $\psi$ )	
		$\Delta$	
Mod( $\neg\mu$ )	$acd$	<b><math>b^*</math></b>	<b><math>cd^*</math></b>
	$bd$	$ac^*$	$abd$
	$b$	$acd$	<b><math>ab^*</math></b>

TABLE 1 – Différences symétriques ; par colonne, les minimaux selon la cardinalité sont notés en gras et les minimaux selon l'inclusion sont notés avec une asterisque.

### 4.2 De nouveaux postulats capturant la minimalité du changement

Nous pouvons ajouter deux postulats supplémentaires pour capturer la minimalité du changement. Ils sont équivalents à (C6) et (C7), à la seule différence qu'en raison de la règle de disjonction (E8), le postulat (E7) peut être restreint aux formules complètes.

- (E6)  $\psi \triangleleft (\mu_1 \wedge \mu_2) \models (\psi \triangleleft \mu_1) \vee (\psi \triangleleft \mu_2)$ .
- (E7) Si  $\psi$  est complète et  $\psi \triangleleft (\mu_1 \wedge \mu_2) \not\models \mu_1$ , alors  $\psi \triangleleft \mu_1 \models \psi \triangleleft (\mu_1 \wedge \mu_2)$ .

On peut observer que l'opérateur d'effacement de Forbus  $\triangleleft_F$  satisfait (E6) et (E7), tandis que l'opérateur de Winslett  $\triangleleft_W$  satisfait (E6) mais pas (E7).

Il n'est guère surprenant que nous puissions énoncer un théorème de représentation pour les opérateurs d'effacement définis par des préordres totaux qui est la contrepartie du théorème de représentation obtenu par Caridroit *et al.* [4] pour la contraction. La preuve nécessite les deux lemmes suivants.

Le premier lemme explicite le résultat de l'effacement par une formule qui n'a qu'un seul contre-modèle et n'utilise que les postulats de base.

**Lemme 1** *Soit  $\triangleleft$  un opérateur d'effacement qui satisfait les postulats (E1)–(E5) et (E8),  $\psi$  une formule satisfaisable,  $w$  une interprétation et  $\alpha_w$  une formule ayant  $w$  comme unique modèle, alors  $\psi \triangleleft \neg\alpha_w \equiv \psi \vee \alpha_w$ .*

**Preuve:** Puisque l'opérateur satisfait (E8) il est suffisant de prouver le lemme quand  $\psi$  est une formule complète ayant, disons  $w_0$  comme unique modèle.

Si  $w_0 = w$ , alors  $\psi \models \alpha_w$  et selon (E2),  $\psi \triangleleft \neg\alpha_w \equiv \psi \equiv \psi \vee \alpha_w$ .

Si  $w_0 \neq w$ , d'après (E5)  $(\psi \triangleleft \neg\alpha_w) \wedge \neg\alpha_w \models \psi$ , et donc  $(\psi \triangleleft \neg\alpha_w) \models \psi \vee \alpha_w$ . Par (E1),  $\psi \models (\psi \triangleleft \neg\alpha_w)$ . De plus, selon (E3),  $(\psi \triangleleft \neg\alpha_w) \not\models \neg\alpha_w$ . Ainsi nous obtenons  $\alpha_w \models (\psi \triangleleft \neg\alpha_w)$  et donc  $\psi \triangleleft \neg\alpha_w \equiv \psi \vee \alpha_w$ .  $\square$

Le deuxième lemme met en jeu les deux postulats additionnels qui traitent de la minimalité du changement.

**Lemme 2** *Soit  $\triangleleft$  un opérateur d'effacement qui satisfait les postulats (E1)–(E8),  $\psi$  une formule complète, et  $\alpha$  et  $\beta$  deux formules qui ne sont pas des tautologies, alors  $\psi \triangleleft (\alpha \wedge \beta) \equiv \psi \triangleleft \alpha$  ou  $\psi \triangleleft \beta$  ou  $(\psi \triangleleft \alpha) \vee (\psi \triangleleft \beta)$ .*

**Preuve:** Sous les hypothèses faites sur les formules la preuve est similaire à celle donnée dans [4, preuve de la Proposition 9].  $\square$

Dans tout ce qui suit, étant donné une interprétation  $w$ ,  $\psi_w$  (resp.  $\alpha_w$ ) représente une formule complète dont l'unique modèle est  $w$ . Également, étant donné une interprétation  $w_i$ , on note  $\alpha_i$  une formule complète dont l'unique modèle est  $w_i$ .

### 4.3 L'effacement en termes de préordres totaux

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème de représentation suivant, qui montre que les postulats capturent tous les opérateurs d'effacement définis par un préordre total.

**Theorem 5** *Un opérateur d'effacement  $\triangleleft$  satisfait les postulats (E1)–(E8) si et seulement si il existe une affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre total  $\leq_w$  tel que  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .*

**Preuve:**  $\Leftarrow$ ) Supposons que nous avons une affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre total  $\leq_w$ .

Considérons l'opérateur d'effacement  $\triangleleft$  défini par

$$\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu)).$$

Prouvons dans un premier temps que  $\triangleleft$  satisfait les postulats (E1)–(E8). Il est évident que  $\triangleleft$  satisfait (E1), (E3), (E4), (E5) et (E8). Si  $\psi$  est insatisfaisable alors (E2), (E6) et (E7) sont trivialement vérifiés. Nous supposons donc dans la suite que  $\psi$  est satisfaisable.

Il découle de la définition d'une affectation fidèle ponctuelle que si  $w$  est un modèle de  $\neg\mu$ , alors  $\psi_w \triangleleft \mu$  est équivalent à  $\psi_w$ . On obtient donc (E2) en utilisant (E8).

Puisque  $\min_{\leq_w} \text{Mod}(\neg\mu_1 \vee \neg\mu_2) \subseteq \min_{\leq_w} \text{Mod}(\neg\mu_1) \cup \min_{\leq_w} \text{Mod}(\neg\mu_2)$ , (E6) est vérifié.

Soit  $\psi$  une formule complète telle que  $\text{Mod}(\psi) = \{w_0\}$ . Supposons que  $\psi \triangleleft (\mu_1 \wedge \mu_2) \not\models \mu_1$ . Cela signifie qu'il existe  $w \in \text{Mod}(\psi) \cup \min_{\leq_{w_0}}(\text{Mod}(\neg(\mu_1 \wedge \mu_2)))$  tel que  $w \in \text{Mod}(\neg\mu_1)$ . Si  $w \in \text{Mod}(\psi \wedge \neg\mu_1)$ , alors  $\text{Mod}(\psi) = \{w\}$  et dans ce cas puisque l'affectation est fidèle ponctuelle  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_1) = \text{Mod}(\psi)$ . Le fait que (E7) est valide découle alors de (E1). Si  $w \notin \text{Mod}(\psi)$ , pour vérifier que (E7) est valide il suffit de montrer que  $\min_{\leq_{w_0}}(\text{Mod}(\neg\mu_1)) \subseteq \min_{\leq_{w_0}}(\text{Mod}(\neg(\mu_1 \wedge \mu_2)))$ . Soit  $w' \in \min_{\leq_{w_0}}(\text{Mod}(\neg\mu_1))$ . Puisque  $\leq_{w_0}$  est un préordre total et que  $w \in \text{Mod}(\neg\mu_1)$ , nous avons  $w' \leq_{w_0} w$ . Supposons qu'il existe  $w'' \in \text{Mod}(\neg(\mu_1 \wedge \mu_2))$  tel que  $w'' <_{w_0} w'$ , alors on a également  $w'' <_{w_0} w$ , ce qui contredit le fait que  $w \in \min_{\leq_{w_0}}(\text{Mod}(\neg(\mu_1 \wedge \mu_2)))$ . Donc (E7) est bien vérifié.

$\Rightarrow$ ) Soit  $\triangleleft$  un opérateur d'effacement qui satisfait les postulats (E1)–(E8). Définissons une relation binaire  $\leq_w$  sur les interprétations comme suit :

$$w_1 \leq_w w_2 \text{ si ou bien } w_1 = w_2 \text{ ou } w_1 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)).$$

Montrons tout d'abord que  $\leq_w$  est un préordre total. Il découle du postulat (E3) que ou bien  $w_1$  ou  $w_2$  appartient à  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2))$ , prouvant ainsi que la relation binaire est totale. Le fait que  $\leq_w$  est réflexive découle du Lemme 1.

La preuve que  $\leq_w$  est transitive est complètement similaire à la preuve donnée par Caridroit *et al.* dans le cas de la contraction (voir [4, Preuve du Theorem 14]). Cette dernière s'appuie sur un lemme analogue au Lemme 2 pour la contraction et utilise alors seulement les postulats (C1), (C6) et (C7), qui sont analogues à (E1), (E6) et (E7) (quand le dernier est restreint à une formule complète).

Il découle de (E2) que l'application  $w \mapsto \leq_w$  est une affectation fidèle ponctuelle.

Il reste à montrer que

$$\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu)).$$

Si  $\psi$  est insatisfaisable, alors les deux côtés de l'équation sont vides et l'égalité est vérifiée. Si  $\psi$  est satisfaisable, alors selon (E8) étant donné une interprétation  $w$  il est suffisant de prouver que  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu) = \{w\} \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Si  $w \in \text{Mod}(\neg\mu)$  alors il découle de (E2) que  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi$  et l'égalité est valide puisque nous utilisons une affectation fidèle. Nous supposons donc dans la suite que  $w \notin \text{Mod}(\neg\mu)$ . Si  $\mu$  est une tautologie, selon (E1) et (E5)  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi$  et l'égalité est valide. Supposons maintenant qu'il existe  $w_1 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$  qui est dans  $\text{Mod}(\neg\mu)$  mais qui n'appartient pas à  $\min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Alors il existe  $w_2 \in \text{Mod}(\neg\mu)$  tel que  $w_2 <_w w_1$ . Nous avons alors  $w_1 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2))$ . Considérons maintenant la formule  $\beta = \neg\mu \wedge \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$ . Clairement nous avons  $\neg\mu \equiv \beta \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ . Puisque (E4) est satisfait,  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi_w \triangleleft (\neg\beta \wedge \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$ . Et donc selon (E6),  $\psi_w \triangleleft \mu \models (\psi_w \triangleleft \neg\beta) \vee (\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2))$ . Nous avons supposé que  $w_1 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$  et  $w_1 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2))$ , donc  $w_1 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg\beta)$ . Selon (E5) nous avons  $(\psi_w \triangleleft \neg\beta) \wedge \neg\beta \models \psi_w$ . Puisque nous avons également  $w_1 \in \text{Mod}(\neg\beta)$ , nous obtenons  $w_1 \in \text{Mod}(\psi_w)$ , c'est-à-dire,  $w_1 = w$ , contradiction.

Cela prouve que  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu) \subseteq \{w\} \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Selon (E1),  $w \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ . Considérons  $w_1$  appartenant à  $\min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$  et dans le but d'obtenir une contradiction supposons  $w_1 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ . Dans ce cas  $\mu$  n'est pas une tautologie et selon (E3)  $\psi_w \triangleleft \mu \not\models \mu$ , ainsi il existe  $w_2$  un modèle de  $\neg\mu$  qui est dans  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ . Si  $w_2 = w$  alors  $w_2 <_w w_1$ , ce qui contredit la minimalité de  $w_1$ .

Si  $w_2 \neq w$ . Puisque  $w_2 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$  nous avons  $\psi_w \triangleleft \mu \not\models \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ . Puisque  $w_1$  et  $w_2$  sont tous les deux des modèles de  $\neg\mu$  observons que  $\mu \wedge \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv \mu$ , et donc selon (E7),  $\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \models \psi_w \triangleleft \mu$ . Puisque par hypothèse  $w_1 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ , nous avons  $w_1 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2))$ . Donc, d'après le Lemme 2 et le Lemme 1,  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) = \{w, w_2\}$ , ce qui contredit la minimalité de  $w_1$ .  $\square$

#### 4.4 L'effacement en termes de préordres partiels

Rappelons que l'opérateur d'effacement de Winslett ne satisfait pas (E7), donc cet opérateur n'est pas pris en compte par le théorème précédent. Cet opérateur est défini par un préordre partiel et non total. Nous pouvons modifier les postulats de l'effacement de façon à ce qu'ils s'adaptent aux préordres partiels.

Dans la preuve du Théorème 5 étant donné un opérateur d'effacement associé à un préordre total, seul le postulat (E7) exige que le préordre soit total. Par conséquent,

comme l'ont fait Katsuno et Mendelzon pour la révision, afin d'obtenir un théorème de représentation par le biais de préordres partiels, nous supprimons le postulat (E7) et le remplaçons par deux postulats plus faibles.

$$(E9) \quad \text{Si } \psi \models \mu_1 \wedge \mu_2, (\psi \triangleleft \mu_1) \models \psi \vee \neg\mu_2 \text{ et } (\psi \triangleleft \mu_2) \models \psi \vee \neg\mu_1, \text{ alors } (\psi \triangleleft \mu_1) \equiv (\psi \triangleleft \mu_2).$$

$$(E10) \quad \text{Si } \psi \text{ est complète, alors } (\psi \triangleleft \mu_1) \wedge (\psi \triangleleft \mu_2) \models \psi \triangleleft (\mu_1 \vee \mu_2).$$

Les opérateurs d'effacement  $\triangleleft_F$  et  $\triangleleft_W$  satisfont tous les deux postulats (E9) et (E10).

La définition de ces postulats permet de concevoir une classe d'opérateurs d'effacement basés sur des préordres partiels. Le théorème suivant montre que les opérateurs d'effacement basés sur des préordres partiels sont complètement caractérisés par les postulats (E1)–(E6) et (E8)–(E10).

**Theorem 6** *Un opérateur d'effacement  $\triangleleft$  satisfait les postulats (E1)–(E6) et (E8)–(E10) si et seulement si il existe une affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre partiel  $\leq_w$  tel que  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .*

**Preuve:**  $\Leftarrow$  Supposons que nous avons affectation fidèle ponctuelle qui associe à chaque interprétation  $w$  un préordre partiel  $\leq_w$ . Considérons l'opérateur d'effacement  $\triangleleft$  défini par  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .

Prouvons dans un premier temps que l'opérateur  $\triangleleft$  satisfait les postulats (E1)–(E6) et (E8)–(E10). La preuve que  $\triangleleft$  satisfait les postulats (E1)–(E6) et (E8) est similaire à la preuve du Théorème 5 ci-dessus, le fait que le préordre est partiel (et non nécessairement total) n'a pas d'impact sur la preuve de ces sept postulats.

Supposons que  $\psi \models \mu_1 \wedge \mu_2$ ,  $(\psi \triangleleft \mu_1) \models \psi \vee \neg\mu_2$  et  $(\psi \triangleleft \mu_2) \models \psi \vee \neg\mu_1$ . Dans le but d'obtenir une contradiction supposons qu'il existe une interprétation  $w$  telle  $w \in \text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_1)$  et  $w \notin \text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_2)$ . Observons que  $w \notin \text{Mod}(\psi)$ . Puisque  $(\psi \triangleleft \mu_1) \models \psi \vee \neg\mu_2$ , nous avons  $w \in \text{Mod}(\neg\mu_2)$ . Par définition de l'opérateur, puisque  $w \notin \text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_2)$ , pour chaque modèle  $w_i$  de  $\psi$  il existe  $w'_i \in \min_{\leq_{w_i}}(\text{Mod}(\neg\mu_2))$  tel que  $w'_i <_{w_i} w$  et  $w'_i$  est minimal dans  $\text{Mod}(\neg\mu_2)$ . Alors chaque  $w'_i$  est un modèle de  $(\psi \triangleleft \mu_2)$ . Or  $(\psi \triangleleft \mu_2) \models \psi \vee \neg\mu_1$ , et donc ou bien  $w'_i \in \text{Mod}(\psi)$  ou  $w'_i \in \text{Mod}(\neg\mu_1)$ . Si  $w'_i \in \text{Mod}(\psi)$ , alors  $w'_i \in \text{Mod}(\psi) \cap \text{Mod}(\neg\mu_2)$ , ce qui contredit le fait que  $\psi \models \mu_2$ . Si  $w'_i \in \text{Mod}(\neg\mu_1)$ , alors  $w'_i <_{w_i} w$  ce qui contredit le fait que  $w \in \min_{\leq_{w_i}}(\text{Mod}(\neg\mu_1))$ . Ainsi dans les deux cas nous obtenons une contradiction et nous avons prouvé que  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_1) \subseteq \text{Mod}(\psi \triangleleft \mu_2)$ . L'inclusion inverse

est prouvée de la même façon ce qui montre que (E9) est satisfait.

Notons que  $\text{Mod}((\psi_w \triangleleft \mu_1) \wedge (\psi_w \triangleleft \mu_2)) = \{w\} \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu_1)) \cap \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu_2)) \subseteq \{w\} \cup \min_{\leq_w} \text{Mod}(\neg\mu_1 \wedge \neg\mu_2)$ . Donc  $(\psi_w \triangleleft \mu_1) \wedge (\psi_w \triangleleft \mu_2) \models \psi_w \triangleleft (\mu_1 \vee \mu_2)$ , ce qui prouve que (E10) est satisfait.

$\Rightarrow$  Soit  $\triangleleft$  un opérateur d'effacement qui satisfait les postulats (E1)–(E6) et (E8)–(E10). Rappelons que dans le suite étant donné une interprétation  $w_i$ , nous notons  $\alpha_i$  une formule dont le seul modèle est  $w_i$ .

Pour chaque interprétation  $w$  nous définissons une relation binaire  $\leq_w$  sur les interprétations par :

$$w_1 \leq_w w_2 \text{ si } \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) = \{w\} \cup \{w_1\}.$$

Montrons dans un premier temps que  $\leq_w$  est un préordre. D'après le Lemme 1,  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg\alpha_1) = \text{Mod}(\psi_w) \cup \{w_1\}$ , et donc  $\leq_w$  est réflexive.

Prouvons maintenant que la relation est transitive. Considérons trois interprétations deux à deux distinctes  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  telles que  $w_1 \leq_w w_2$  et  $w_2 \leq_w w_3$ . Nous avons donc  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) = \text{Mod}(\psi_w) \cup \{w_1\}$ , c'est-à-dire  $\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv \psi_w \vee \alpha_1$  et  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_2 \vee \alpha_3)) = \text{Mod}(\psi_w) \cup \{w_2\}$ , c'est-à-dire  $\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_2 \vee \alpha_3) \equiv \psi_w \vee \alpha_2$ . Supposons tout d'abord qu'une de ces interprétations est égale à  $w$ . Si  $w_1 = w$ , alors par (E2),  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_3)) = \text{Mod}(\psi_w)$  et  $w_1 \leq_w w_3$ . Si  $w_2 = w$ , alors selon les hypothèses et par (E2), on a également  $w_1 = w$  et donc  $w_1 = w_2$ . Si  $w_3 = w$  alors selon les hypothèses et par (E2) nous avons  $w_1 = w_2 = w_3 = w$ . Supposons maintenant qu'aucune des interprétations  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  n'est égale à  $w$ , et donc que  $\psi_w \models (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3)$ . D'une part  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \equiv \psi_w \vee \alpha_1$ , d'où  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \models \psi_w \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)$ . D'autre part d'après (E6),  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \models (\psi_w \triangleleft \neg\alpha_1) \vee (\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3))$ . Donc sous nos hypothèses  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3) \models (\psi_w \triangleleft \neg\alpha_1) \vee \psi_w \vee \alpha_2$ . Selon le Lemme 1,  $\psi_w \triangleleft \neg\alpha_1 \equiv \psi_w \vee \alpha_1$ . D'où  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \models \psi_w \vee \alpha_1 \vee \alpha_2$ . Donc par (E9)  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \equiv \psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3)$ . En conséquence, d'une part,  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3)) = \{w, w_1\}$ , et donc  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \models \psi_w \vee \alpha_1 \vee \alpha_3$ . D'autre part par (E5),  $(\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_3)) \wedge (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_3) \models \psi_w$ , et donc  $(\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_3)) \models \psi_w \vee (\alpha_1 \vee \alpha_3) \models \psi_w \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)$ . Par (E9) nous obtenons que  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_3) \equiv \psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3)$ . On en déduit que  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_3) \equiv \psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$ . Donc  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg(\alpha_1 \vee \alpha_3)) = \text{Mod}(\psi_w) \cup \{w_1\}$ , c'est-à-dire  $w_1 \leq_w w_3$ , ce qui prouve la transitivité de la relation  $\leq_w$ .

Il découle du postulat (E2) que l'application  $w \mapsto_{\leq_w} w$  est une assignation fidèle ponctuelle.

Il reste à prouver que  $\text{Mod}(\psi \triangleleft \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \bigcup_{w \in \text{Mod}(\psi)} \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Si  $\psi$  is insatisfaisable, alors

les deux membres de l'équation sont vides et l'égalité est trivialement vérifiée. Si  $\psi$  est satisfaisable, alors puisque le postulat (E8) est vérifié, étant donné une interprétation  $w$  il est suffisant de prouver que  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu) = \{w\} \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Si  $w \in \text{Mod}(\neg\mu)$  alors il découle de (E2) que  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi_w$  et l'égalité est vérifiée puisque l'assignation est fidèle. Si  $\mu$  est une tautologie alors selon (E5)  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi_w$  et l'égalité est vérifiée. Nous supposons désormais que  $w \notin \text{Mod}(\neg\mu)$  et que  $\mu$  n'est pas une tautologie.

Prouvons tout d'abord que  $\text{Mod}(\psi_w) \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu)) \subseteq \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ . On sait par (E1) que  $w \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ . Considérons maintenant  $w_0 \neq w$  et  $w_0 \in \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ .

Supposons que  $\text{Mod}(\neg\mu) = \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ . Pour toute interprétation  $w_i \in \text{Mod}(\neg\mu)$ , puisque ni  $\neg\alpha_0$  ni  $\neg\alpha_i$  ne sont des tautologies il découle du Lemme 2 que  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_i) \equiv \psi_w \vee \alpha_0$  ou  $\psi_w \vee \alpha_i$  ou  $\psi_w \vee \alpha_0 \vee \alpha_i$ . Puisque  $w_0 \in \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$  il n'existe aucun  $w_i \in \text{Mod}(\neg\mu)$  tel que  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_i) \equiv \psi_w \vee \alpha_i$ , et donc  $w_0 \in \psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_i)$ .

Observons que  $\mu \equiv \bigvee_{i=1}^n (\alpha_0 \vee \alpha_i)$ . Donc selon (E4) et en appliquant de façon répétée (E10) nous obtenons que  $w_0 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$ , prouvant ainsi que

$$\text{Mod}(\psi_w) \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu)) \subseteq \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu).$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse,  $\text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu) \subseteq \text{Mod}(\psi_w) \cup \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Considérons  $w_0 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \mu)$  tel que  $w_0 \neq w$ . Par (E5) nous avons  $w_0 \in \text{Mod}(\neg\mu)$ . Afin d'obtenir une contradiction supposons que  $w_0 \notin \min_{\leq_w}(\text{Mod}(\neg\mu))$ . Cela signifie qu'il existe  $w_1 \in \text{Mod}(\neg\mu)$  tel que  $w_1 <_w w_0$ , c'est-à-dire,  $\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1) \equiv \psi_w \vee \alpha_1$ . Considérons maintenant la formule  $\beta = \neg\mu \wedge \neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1$ . Clairement nous avons  $\neg\mu \equiv \beta \vee \alpha_0 \vee \alpha_1$ . Selon (E4),  $\psi_w \triangleleft \mu \equiv \psi_w \triangleleft (\neg\beta \wedge \neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1)$ . Par (E6),  $\psi_w \triangleleft (\neg\beta \wedge \neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1) \models (\psi_w \triangleleft \neg\beta) \vee (\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1))$ . Puisque  $w_1 <_w w_0$ ,  $w_0 \notin \text{Mod}(\psi_w \triangleleft (\neg\alpha_0 \wedge \neg\alpha_1))$ , et donc  $w_0 \in \text{Mod}(\psi_w \triangleleft \neg\beta)$ . On a également  $w_0 \in \text{Mod}(\neg\mu)$  et *a fortiori*  $w_0 \in \text{Mod}(\neg\beta)$ . Alors selon (E5),  $(\psi_w \triangleleft \neg\beta) \wedge (\neg\beta) \models \psi_w$ , et nous obtenons  $w_0 = w$ , ce qui fournit une contradiction.  $\square$

#### 4.5 La contraction en termes de préordres partiels

Comme nous l'avons observé dans la Section 3.2, il manque toujours un théorème de représentation pour les opérateurs de contraction par le biais de préordres partiels. Notre objectif est de combler cette lacune. De la même manière que pour l'effacement, nous sommes en mesure de donner une version des postulats de contraction qui prend en compte les préordres partiels et nous pouvons ainsi concevoir une classe d'opérateurs de contraction basés sur les préordres partiels.

Nous supprimons le postulat (C7) et le remplaçons par deux postulats plus faibles, (C8) et (C9). Ils sont similaires



aux postulats (E9) et (E10), à l'exception du dernier qui n'est plus restreint aux formules complètes.

- (C8) Si  $\psi \models \mu_1 \wedge \mu_2$ ,  $(\psi - \mu_1) \models \psi \vee \neg \mu_2$  et  $(\psi - \mu_2) \models \psi \vee \neg \mu_1$ ,  
alors  $(\psi - \mu_1) \equiv (\psi - \mu_2)$ .
- (C9)  $(\psi - \mu_1) \wedge (\psi - \mu_2) \models \psi - (\mu_1 \vee \mu_2)$ .

Les opérateurs de contraction  $-_D$  et  $-_S$  satisfont (C8) et (C9).

Le théorème suivant montre que les opérateurs de contraction basés sur des préordres partiels sont parfaitement caractérisés par les postulats (C1)–(C6), (C8) et (C9).

**Theorem 7** *Un opérateur de contraction  $-$  satisfait les postulats (C1)–(C6) et (C8)–(C9) si et seulement si il existe une affectation fidèle qui associe à chaque formule  $\psi$  un préordre partiel  $\leq_\psi$  tel que  $\text{Mod}(\psi - \mu) = \text{Mod}(\psi) \cup \min_{\leq_\psi}(\text{Mod}(\neg \mu))$ .*

La preuve de ce théorème suit exactement les mêmes lignes que la preuve du théorème 6.

## 5 Conclusion

Dans cet article consacré à l'effacement des croyances en logique propositionnelle nous poursuivons et complétons les travaux initiés par Katsuno et Mendelzon [14]. Ils ont formellement défini l'effacement des croyances dans un cadre sémantique et ont proposé un ensemble de postulats basiques. Nous proposons de nouveaux postulats capturant le principe de changement minimal pour l'effacement, plus précisément (E6) et (E7), qui permettent d'établir un premier théorème de représentation montrant qu'un opérateur d'effacement satisfaisant l'ensemble des postulats (E1)–(E8) se traduit par un préordre total sur les interprétations. De plus, le remplacement du postulat (E7) par deux postulats plus faibles (E9) et (E10) nous permet d'établir un deuxième théorème de représentation montrant qu'un opérateur de d'effacement satisfaisant l'ensemble des postulats (E1)–(E6) et (E8)–(E10) se traduit par un préordre partiel sur les interprétations.

De plus, pour l'opération de contraction, nous montrons qu'en remplaçant le postulat (C7) par deux postulats plus faibles (C8) et (C9), nous pouvons établir un théorème de représentation, qui jusqu'à ce jour manquait, montrant qu'un opérateur de contraction satisfaisant l'ensemble des (C1)–(C6) et (C8)–(C9) se traduit par un préordre partiel sur les interprétations.

Ainsi notre contribution permet de mettre une touche finale au panorama complet des opérations de révision, mise à jour, contraction et effacement dans un même cadre sémantique unifié, en termes de postulats et de théorèmes de représentation.

Une suite naturelle à ce travail serait l'étude de l'opération, appelée *Forget*, proposée par Winslett [21], qu'elle compare à la contraction. Soit  $\psi$  et  $\mu$  deux formules propositionnelles et soit  $\diamond$  un opérateur de mise à jour, l'opération de Forget est équivalente à  $(\psi \diamond \mu) \vee (\psi \diamond \neg \mu)$ .

Une autre perspective serait l'étude de la contraction et de l'effacement itérés. Alors que de nombreux travaux ont été développés sur la révision itérée suite aux travaux de Darwiche et Pearl [7], la contraction itérée n'a suscité que peu d'intérêt jusqu'à présent.

Par ailleurs, une étude plus ambitieuse serait l'étude de la complexité de problèmes de décision comme la vérification de modèles pour les opérateurs de contraction et d'effacement.

## Références

- [1] C.E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.
- [2] C.E. Alchourrón and D. Makinson. On the logic of theory change : Safe contraction. *Studia Logica*, 44(4) :14–37, 1985.
- [3] T. Caridroit, S. Konieczny, and P. Marquis. Contraction in propositional logic. In *Proceedings of ECS-QARU'15*, pages 186–196, 2015.
- [4] T. Caridroit, S. Konieczny, and P. Marquis. Contraction in propositional logic. *Int. J. Approx. Reason.*, 80 :428–442, 2017.
- [5] N. Creignou, R. Ktari, and O. Papini. Belief contraction and erasure in fragments of propositional logic. *J. Log. Comput.*, 32(7) :1436–1468, 2022.
- [6] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of AAAI'88*, pages 475–479, 1988.
- [7] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artif. Intell.*, 89(1-2) :1–29, 1997.
- [8] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 57(2–3) :227–270, 1992.
- [9] K. D. Forbus. Introducing actions into qualitative simulation. In *Proceedings International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization (IJCAI)*, pages 1273–1278, 1989.
- [10] P. Gärdenfors. Knowledge in flux. In *Cambridge University Press, Cambridge UK*, 1988.
- [11] A. Herzig and O. Rifi. Propositional belief base update and minimal change. *Artificial Intelligence*, 115(1) :107–138, 1999.

- [12] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. A unified view of propositional knowledge base updates. In *Proceedings of IJCAI'89*, pages 1413–1419, 1989.
- [13] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3) :263–294, 1991.
- [14] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In P. Gärdenfors, editor, *Belief revision*, pages 183–203. Cambridge University Press, 1992.
- [15] A.M. Keller and M. Winslett. On the use of an extended relational model to handle changing incomplete information. *IEEE Trans. Software Eng.*, 11(7) :620–633, 1985.
- [16] R. Ktari. *Changement de croyances dans des fragments de la logique propositionnelle*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 5 2016.
- [17] P. Marquis, H. Prade, and O. Papini, editors. *Panorama de l'intelligence artificielle : Volume 1 : Représentation des connaissances et formalisation des raisonnements*. Cepaduès, 2014.
- [18] P. Marquis, H. Prade, and O. Papini, editors. *A Guided Tour of Artificial Intelligence Research : Volume I : Knowledge Representation, Reasoning and Learning*. Springer, 2020.
- [19] K. Satoh. Nonmonotonic reasoning by minimal belief revision. In *Proceedings of FGCS'88*, pages 455–462, Tokyo, 1988.
- [20] M. Winslett. Reasoning about action using a possible models approach. In *Proc. AAAI*, pages 89–93, 1988.
- [21] M. Winslett. Sometimes updates are circumscription. In *Proceedings International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization (IJCAI)*, pages 859–863, 1989.