Actes JIAF 2024

Equité dans le problème d'allocation répétée de maisons

Karl Jochen Micheel[1] **Anaëlle Wilczynski**[2]

[1] Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Germany
[2] MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, France
karl.micheel@hhu.de anaelle.wilczynski@centralesupelec.fr

Résumé

Cet article considère le problème d'allocation de maisons–le problème d'allocation de ressources indivisibles où chaque agent doit recevoir exactement un objet–dans un contexte répété, où le même problème d'allocation est posé à plusieurs pas de temps. L'équité pouvant rarement être atteinte dans le cadre d'une décision unique, nous étudions si le cadre répété nous permet de l'obtenir. En particulier, nous introduisons plusieurs critères d'équité et étudions s'ils peuvent être satisfaits dans notre cadre d'allocation répétée de maisons. Bien que les problèmes de décision associés soient globalement difficiles d'un point de vue computationnel, nous identifions des restrictions pour lesquelles ces problèmes peuvent être résolus efficacement.

Abstract

This article considers a house allocation setting–where exactly one object has to be assigned to each agent–in a repeated context, where the same allocation problem is decided multiple times. Since fairness can be rarely achieved in a one-shot decision, we study whether fairness over time can be reached. In particular, we introduce several fairness criteria and investigate whether they can be satisfied in our repeated house allocation setting. While we show that most related decision problems are computationally hard in general, we identify restricted positive cases.

1 Introduction

L'allocation de maisons, où chaque agent reçoit exactement un objet, est l'un des problèmes de partage équitable les plus simples, qui capture néanmoins de nombreux problèmes du monde réel. Garantir l'équité est généralement difficile dans le problème d'allocation de maisons. Il existe cependant de nombreux contextes dans lesquels la décision d'allocation doit être répétée fréquemment, par exemple lors de l'attribution de cours à des enseignants ou de créneaux horaires à des travailleurs. Cette répétition peut être l'occasion de contourner les impossibilités d'équité qui surviennent dans un cadre de décision déterministe ponctuelle.

Dans cet article, nous étudions comment mesurer et atteindre l'équité dans le problème d'allocation répétée de maisons. Concrètement, nous examinons s'il est possible de construire les prochaines allocations, avec exactement un objet par agent, pour un nombre *donné fini* d'étapes, et éventuellement des allocations précédentes, de telle sorte que la séquence d'allocation globale atteigne l'équité dans le temps. Idéalement, nous aimerions pouvoir utiliser des solutions du problème d'affectation randomisé [1], mais celles-ci ne sont pas forcément implémentables en un horizon fini et fixé à l'avance, comme ce que nous considérons. Alors que plusieurs travaux récents ont étudié des problèmes de partage équitable dans le temps [2, 3], ils supposent des fonctions d'utilité additives pour les préférences des agents. En revanche, nous nous concentrons sur le problème standard, *ordinal*, d'allocation de maisons, ce qui induit des notions d'équité pertinentes bien différentes. Nous étudions trois critères d'équité qui se concentrent sur différents aspects de l'équité au fil du temps : l'*envie en miroir*, qui impose une symétrie dans l'envie entre les agents, le *traitement égal entre égaux*, qui exige que des agents identiques soient identiquement traités, et la minimisation de l'*envie cumulée maximale* entre toute paire d'agents.

2 Mesures d'équité

On considère un ensemble N de n agents et un ensemble M de n objets. Chaque agent $i \in N$ a des préférences ordinales strictes $\succ_i$ sur M. Un profil de préférence $\succ$ est l'ensemble des ordres $\succ_i$ pour tous les agents $i \in N$. Une allocation A est une bijection $A : N \to M$. Une allocation A est *Pareto-optimale* s'il n'existe pas d'autre allocation A' telle que $A'(i) \succeq_i A(i)$ pour chaque agent $i \in N$ et il existe un agent i tel que $A'(i) \succ_i A(i)$. Une séquence d'allocations $\mathcal{A}$ sur T étapes est notée $\mathcal{A} = \langle A^1, \dots, A^T \rangle$. Nous notons

$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ la concaténation de deux séquences d'allocations $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. Un agent i *envie* l'agent j dans l'allocation A si $A(j) \succ_i A(i)$. Pour une séquence $\mathcal{A} = \langle A^1, \ldots, A^T \rangle$, l'envie accumulée de l'agent i envers l'agent j est $e^{\mathcal{A}}(i, j) := |\{t \in [T] : A^t(j) \succ_i A^t(i)\}|$. Notre première notion impose la symétrie de l'envie accumulée entre les paires d'agents.

Definition 1 (Envie en miroir)**.** *Une séquence d'allocation $\mathcal{A} = \langle A^1, \ldots, A^T \rangle$ satisfait l'envie en miroir si $e^{\mathcal{A}}(i, j) = e^{\mathcal{A}}(j, i)$, pour chaque paire d'agents i et j.*

Une autre façon d'envisager l'équité consiste à traiter de manière égale des agents considérés comme égaux.

Definition 2 (Traitement égal des égaux)**.** *Une séquence $\mathcal{A} = \langle A_1, \ldots, A^T \rangle$ satisfait le traitement égal des égaux si $\biguplus_{t\in[T]} A^t(i) = \biguplus_{t\in[T]} A^t(j)$ pour tous agents i et j avec les mêmes préférences, où $\uplus$ représente l'union multiensemble.*

Nous explorons aussi la possibilité de garantir aux agents un nombre maximum de fois où ils envient le même agent.

Definition 3 (Envie cumulée)**.** *L'envie cumulée maximale d'une séquence $\mathcal{A}$ est donnée par $\max_{(i,j)\in N^2} e^{\mathcal{A}}(i, j)$.*

3 Résultats computationnels

Nous étudions les problèmes computationnels liés à nos concepts d'équité combinés avec l'optimalité de Pareto.

Mirrored Envy Completion (MirEnvyPO)	
Instance :	$(N, M, \succ)$, séquence passée $\mathcal{A}_1$, entier T
Question :	Existe-t-il une séquence d'allocations $\mathcal{A}_2 = \langle A_2^1, \ldots, A_2^T \rangle$ telle que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ satisfait l'envie en miroir et chaque allocation A_2^t est Pareto-optimale pour $t \in [T]$?

Nous montrons que MirEnvyPO est résoluble en temps polynomial lorsque nous n'avons qu'une seule prochaine étape ($T \leq 1$). En revanche, nous montrons qu'à partir d'un horizon de deux étapes, le problème devient NP-complet même s'il n'y a aucune allocation passée ($\mathcal{A}_1$ est vide). Néanmoins, nous exhibons un algorithme polynomial dans le cas d'un horizon de deux étapes, lorsque les agents ont les mêmes préférences. Le problème MirEnvyPO reste ouvert pour $T = 3$ et des agents avec les mêmes préférences, mais nous le conjecturons difficile.

Equal Treatment of Equals Completion (ETEPO)	
Instance :	$(N, M, \succ)$, séquence passée $\mathcal{A}_1$, entier T
Question :	Existe-t-il une séquence d'allocations $\mathcal{A}_2 = \langle A_2^1, \ldots, A_2^T \rangle$ telle que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ satisfait un traitement égal des égaux et que chaque allocation A_2^t est Pareto-optimale pour $t \in [T]$?

Soit EQ l'ensemble des sous-ensembles maximaux d'agents avec les mêmes préférences. Pour garantir un traitement égal entre égaux, pour chaque $C \in EQ$, chaque agent de C doit obtenir chaque objet le même nombre de fois que les autres agents de C. En l'absence de séquence passée, le traitement égal des égaux ne peut pas être assuré s'il existe un groupe $C \in EQ$ tel que $|C| > T$, et peut toujours être garanti si chaque taille de groupe dans EQ divise T. Il s'ensuit que ETEPO est résoluble en temps polynomial lorsqu'il n'y a que deux prochaines étapes et pas d'allocation passée. Bien que la complexité exacte de ETEPO reste ouverte, nous soupçonnons le problème d'être NP-complet, même pour trois étapes et pas d'allocation passée.

En revanche, nous montrons que le problème ETE, où l'optimalité de Pareto n'est plus requise, est NP-complet, même sans allocation passée. Néanmoins, ETE est résoluble efficacement lorsqu'il n'y a pas d'allocation passée et $|EQ|$ est fixé. De plus, nous dérivons un algorithme polynomial pour ETE si $T < \min\{|C| : C \in EQ \text{ et } |C| > 1\}$.

Max Cumulative Envy Bound (MaxCumEnvyPO)	
Instance :	$(N, M, \succ)$, entier T, entier B
Question :	Existe-t-il une séquence $\mathcal{A} = \langle A^1, \ldots, A^T \rangle$ telle que $e^{\mathcal{A}}(i, j) \leq B$, pour tous agents i, j, et A^t est Pareto-optimale pour tout $t \in [T]$?

Il est toujours possible de construire une séquence d'allocation où chaque agent envie un autre au maximum $\lceil \frac{T}{2} \rceil$ fois. Cette borne est atteinte lorsque les agents ont les mêmes préférences. En général, nous prouvons que MaxCumEnvyPO est NP-complet même pour $B = \frac{T}{3}$ et $T = 3$.

4 Perspectives

Il serait intéressant de relâcher certains de nos critères d'équité. On pourrait par exemple assouplir l'envie en miroir en laissant une certaine marge dans la différence d'envie entre les agents. De plus, on pourrait redéfinir l'égalité de traitement entre égaux pour permettre plus de flexibilité dans le traitement similaire tout en élargissant le champ des agents qui devraient être traités de la même manière. Enfin, une possibilité serait de permettre une certaine variabilité dans l'ensemble des agents ou des objets, ou de supposer que les préférences peuvent être modifiées au fil du temps.

Références

[1] Anna Bogomolnaia and Hervé Moulin. A new solution to the random assignment problem. *Journal of Economic theory*, 100(2) :295–328, 2001.

[2] Ioannis Caragiannis and Shivika Narang. Repeatedly matching items to agents fairly and efficiently. In *Proc. of SAGT-23*, pages 347–364, 2023.

[3] Ayumi Igarashi, Martin Lackner, Oliviero Nardi, and Arianna Novaro. Repeated fair allocation of indivisible items. In *Proc. of AAAI-24*, pages 9781–9789, 2024.